



**Centralna Komisja Egzaminacyjna**

**EGZAMIN MATURALNY 2012**

**MATEMATYKA**

**POZIOM PODSTAWOWY**

**Kryteria oceniania odpowiedzi**

**CZERWIEC 2012**

**Zadanie 1. (0–1)**

Obszar standardów	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Usuwanie niewymierności z mianownika (I.1.a)	<b>D</b>

**Zadanie 2. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wykorzystanie pojęcia wartości bezwzględnej do sprawdzenia czy dane liczby są rozwiązaniami równania typu $ x - a  = b$ (I.1.f)	<b>A</b>
--	---	----------

**Zadanie 3. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Odczytanie z postaci iloczynowej równania wielomianowego jego rozwiązań (I.3.d)	<b>A</b>
--	---	----------

**Zadanie 4. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Wykonanie obliczeń procentowych (III.1.d)	<b>C</b>
--------------------------	---	----------

**Zadanie 5. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie wykresu funkcji kwadratowej danej wzorem (II.4.a)	<b>A</b>
---	---	----------

**Zadanie 6. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej (II.4.b)	<b>D</b>
---	--	----------

**Zadanie 7. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie rachunku kątów w trójkącie (III.7.c)	<b>C</b>
--------------------------	---	----------

**Zadanie 8. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych (II.7.c)	<b>C</b>
---	--	----------

**Zadanie 9. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znalezienie związków miarowych w figurach płaskich. Zastosowanie twierdzenia Pitagorasa (II.7.c)	<b>C</b>
---	--	----------

**Zadanie 10. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie związków między kątem wpisanym i środkowym (II.7.a)	<b>D</b>
---	---	----------

**Zadanie 11. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wskazanie trójkąta przystający do danego (I.7.c)	<b>B</b>
--	--	----------

**Zadanie 12. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wskazanie równania okręgu o podanym środku i promieniu (II.8.g)	<b>A</b>
---	---	----------

**Zadanie 13. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie różnicy wyrażeń wymiernych (II.2.f)	<b>A</b>
---	--	----------

**Zadanie 14. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Obliczenie wyrazu ciągu liczbowego określonego wzorem ogólnym (I.5.a)	<b>A</b>
--	---	----------

**Zadanie 15. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Obliczenie wyrazu ciągu geometrycznego z wykorzystaniem własności ciągu (II.5.c)	<b>B</b>
---	--	----------

**Zadanie 16. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie informacji	Wyznaczenie miary kąta ostrego (I.6.b)	<b>C</b>
--	--	----------

**Zadanie 17. (0–1)**

Użycie i tworzenie strategii	Określenie wzoru funkcji o podanej dziedzinie (IV.4.a)	<b>D</b>
------------------------------	--	----------

**Zadanie 18. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Zinterpretowanie znaków współczynników $a$ i $b$ we wzorze funkcji liniowej (II.4.g)	<b>C</b>
---	--	----------

**Zadanie 19. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie współrzędnych środka odcinka (II.8.f)	<b>A</b>
---	---	----------

**Zadanie 20. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznaczenie mediany zbioru danych (II.10.a)	<b>C</b>
---	---	----------

**Zadanie 21. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia (II.2.a)	<b>C</b>
---	--	----------

**Zadanie 22. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Obliczenie objętości stożka (III.9.b)	<b>C</b>
--------------------------	---------------------------------------	----------

**Zadanie 23. (0–1)**

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia z zastosowaniem klasycznej definicji prawdopodobieństwa (IV.10.b)	<b>D</b>
------------------------------	---	----------

**Zadanie 24. (0–1)**

Modelowanie matematyczne	Wyznaczenie związków miarowych w walcu (III.9.b)	<b>B</b>
--------------------------	--	----------

**Zadanie 25. (0–2)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązanie nierówności kwadratowej (II.3.a)
---	--

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy:

- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego  $x_1 = -2, x_2 = 5$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy,

albo

- rozłoży trójmian kwadratowy  $x^2 - 3x - 10$  na czynniki liniowe i zapisze nierówność  $(x + 2)(x - 5) < 0$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy,

albo

- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, np.,  $x_1 = 2, x_2 = -5$ , stąd  $x \in (-5, 2)$ ,

albo

- doprowadzi nierówność do postaci  $\left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}$  (na przykład z postaci

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} < 0 \text{ otrzymuje } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 < \frac{49}{4}, \text{ a następnie } \left|x - \frac{3}{2}\right| < \frac{7}{2}$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy:

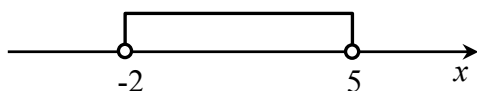
- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $-2 < x < 5$  lub  $(-2, 5)$  lub  $x \in (-2, 5)$

albo

- sporządzi ilustrację geometryczną (oś liczbowa, wykres) i zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci:  $x > -2, x < 5$

albo

- poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów:



**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu  $x = -2, x = 5$  i zapisze np.:  $x \in (2, 5)$ , popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to za takie rozwiązanie otrzymuje **2 punkty**.

**Zadania 26. (0–2)**

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie definicję średniej arytmetycznej do wyznaczenia liczby elementów zbioru danych (III.10.a)
--------------------------	--

**I sposób rozwiązania**

Niech  $x$  oznacza liczbę studentów w danej grupie. Wtedy łączna liczba lat studentów w danej grupie wynosi  $23x$ , zaś łączna liczba lat studentów i opiekuna to  $23x + 39$ . Zatem średnia wieku studentów wraz z opiekunem jest równa:  $\frac{23x + 39}{x + 1}$ .

Otrzymujemy równanie  $\frac{23x + 39}{x + 1} = 24$  stąd  $23x + 39 = 24(x + 1)$ , a więc  $x = 15$ .

Odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze nową średnią wieku studentów wraz z opiekunem:  $\frac{23x + 39}{x + 1}$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy liczbę studentów w grupie: 15 osób.

**II sposób rozwiązania**

Zapisujemy zależności pomiędzy liczbą studentów danej grupy, a łączną liczbą lat wszystkich studentów. Niech  $x$  oznacza liczbę studentów w grupie, zaś  $S$  łączną liczbę lat studentów.

Zapisujemy układ równań: 
$$\begin{cases} \frac{S}{x} = 23 \\ \frac{S + 39}{x + 1} = 24 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań 
$$\begin{cases} S = 23x \\ \frac{23x + 39}{x + 1} = 24 \\ 23x + 39 = 24(x + 1) \\ x = 15 \end{cases}$$

Odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze układ równań opisujący średnie wieku, np. 
$$\begin{cases} \frac{S}{x} = 23 \\ \frac{S + 39}{x + 1} = 24 \end{cases}$$

gdzie  $x$  jest liczbą studentów w danej grupie, zaś  $S$  jest łączną liczbą lat studentów, i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy obliczy liczbę studentów w danej grupie: 15 studentów.

**III sposób rozwiązania**

Różnicę wieku opiekuna i średniej wieku studentów rozdzielamy między  $x$  studentów i jednego opiekuna.

- Obliczamy różnicę wieku opiekuna i średniej wieku studentów  $39 - 23 = 16$ .
- Ponieważ średnia wieku wzrosła o 1 rok, więc te 16 lat rozdzielamy pomiędzy studentów i opiekuna, każdemu dodając 1 rok.
- Zatem  $16 = x \cdot 1 + 1$ , stąd  $x = 15$ .
- Zapisujemy odpowiedź: W tej grupie jest 15 studentów.

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

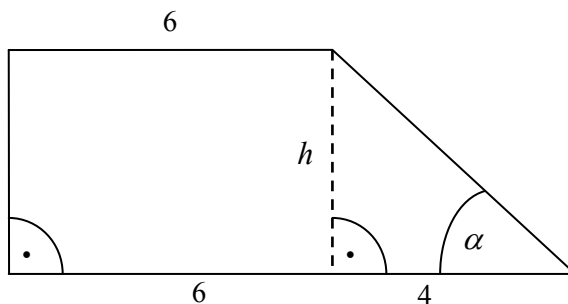
**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt** gdy obliczy różnicę lat opiekuna i średniej wieku studentów  $39 - 23 = 16$  i słownie zapisze sposób rozumowania, np.: *Ponieważ średnia lat wzrosła do 24 lat, więc każdemu studentowi z tych 16 lat dodajemy 1 rok oraz 1 rok dla opiekuna* i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt** gdy obliczy liczbę studentów w danej grupie: 15 studentów.

**Zadanie 27. (0–2)**

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie pole trapezu prostokątnego. Zastosowanie funkcji trygonometrycznych (IV.7.c)
------------------------------	---

**Rozwiązanie**



Obliczamy wysokość trapezu  $h$ , korzystając z faktu, że tangens kąta ostrego jest równy 3:

$$\frac{h}{4} = 3, \text{ stąd } h = 12.$$

Zatem pole trapezu jest równe  $\frac{(6+10) \cdot 12}{2} = 96$ .

**Schemat oceniania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt** gdy:

- obliczy wysokość trapezu  $h = 12$  i na tym poprzestanie lub błędnie obliczy pole, albo
- obliczy wysokość trapezu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy pole trapezu.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt** gdy poprawnie obliczy pole trapezu  $P = 96$ .

**Zadania 28. (0–2)**

Rozumowanie i argumentacja	Uzasadnienie tożsamości trygonometrycznej z zastosowaniem prostych związków między funkcjami trygonometrycznymi kąta ostrego (V.6.c)
----------------------------	--

**I sposób rozwiązania**

$$\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) = \cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)$$

$$\sin^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha (-\sin^2 \alpha)$$

$$L = P$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... 1 pkt

gdy przekształci lewą lub prawą stronę tej równości do postaci:

$\sin^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)$  lub  $\cos^2 \alpha (\cos^2 \alpha - 1)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

**II sposób rozwiązania**

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$1 \cdot (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$$

$$L = P$$

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... 1 pkt

gdy uzyska po lewej stronie wyrażenie  $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

**III sposób rozwiązania**

$$L = \sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha =$$

$$= \sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - (1 - \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha =$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha = P$$

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... 1 pkt

gdy przekształcając lewą lub prawą stronę równości uzyska wyrażenie

$\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje** ..... 2 pkt

gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.



**IV sposób rozwiązania**

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^4 \alpha \\ (1 - \cos^2 \alpha) \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha &= (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^4 \alpha \\ 1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha \\ 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha \\ L &= P\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}\sin^4 \alpha + \cos^2 \alpha &= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha \\ \sin^4 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) &= \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \alpha) \\ \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 &= \sin^2 \alpha + 1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha \\ \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 &= \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + 1 \\ L &= P\end{aligned}$$

**Schemat oceniania IV sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy przekształci równość do postaci, w której występuje tylko jedna funkcja trygonometryczna, np.:  $(1 - \cos^2 \alpha) \cdot (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) + \cos^4 \alpha$

lub  $\sin^4 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha + (1 - \sin^2 \alpha) \cdot (1 - \sin^2 \alpha)$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
jeżeli przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

**V sposób rozwiązania**

Daną równość zapisujemy w postaci  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ . Przekształcamy:

$$\begin{aligned}L = \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha &= (\sin^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha = \\ &= 1 - 2 \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha - \cos^4 \alpha = 1 - 2 \cos^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = P\end{aligned}$$

**Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy uzyska po lewej stronie wyrażenie  $(1 - \cos^2 \alpha)^2 - \cos^4 \alpha$  i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**  
gdy przeprowadzi pełne rozumowanie i uzasadni, że tożsamość jest prawdziwa.

**Zadanie 29. (0–2)**

Rozumowanie i argumentacja	Przeprowadzenie dowodu algebraicznego (V.1.a)
----------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Weźmy trzy kolejne liczby całkowite  $n-1$ ,  $n$ ,  $n+1$ . Wówczas

$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 3n^2 + 2$ , więc reszta z dzielenia sumy ich kwadratów przez 3 jest równa 2.

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych w postaci

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 3n^2 + 2$$

**II sposób rozwiązania**

Weźmy trzy kolejne liczby całkowite  $n$ ,  $n+1$ ,  $n+2$ .

Wówczas  $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2$ , więc reszta z dzielenia sumy ich kwadratów przez 3 jest równa 2.

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych, doprowadzi wyrażenie do postaci  $n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 5$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy zapisze sumę kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych w postaci

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3n^2 + 6n + 3 + 2 \quad \text{lub} \quad n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2.$$

**Uwaga**

Mogą się zdarzyć rozwiązania wykorzystujące kongruencje:

wśród trzech kolejnych liczb jest jedna podzielna przez 3 (oznaczymy ją przez  $a$ ), jedna dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 1 (oznaczymy ją przez  $b$ ) i jedna dająca przy dzieleniu przez 3 resztę 2 (oznaczymy ją przez  $c$ ).

Mamy zatem  $a \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $b \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $c \equiv 2 \pmod{3}$ .

Wówczas  $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5 \equiv 2 \pmod{3}$ .

**Zadanie 30. (0–2)**

Modelowanie matematyczne	Zastosowanie wzoru na $n$ -ty wyraz i sumę ciągu arytmetycznego (III.5.c)
--------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Obliczamy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0.$$

Zatem  $a_2 = 0 - (-1) = 1$  oraz  $r = a_2 - a_1 = 1 - (-1) = 2$ .

Korzystamy ze wzoru na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego i otrzymujemy:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = -1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 3$$

Odpowiedź:  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$  wyraża się wzorem  $a_n = 2n - 3$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy obliczy wartości sum częściowych:

$$S_1 = a_1 = 1 - 2 = -1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 4 - 4 = 0$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy bezbłędnie wyznaczy  $n$ -ty wyraz ciągu  $(a_n)$ :  $a_n = 2n - 3$ .

**Uwagi**

1. Zdający może od razu zapisać układ  $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_1 + a_2 = 0 \end{cases}$

2. Jeżeli zdający zapisze układ  $\begin{cases} a_1 = -1 \\ a_2 = 0 \end{cases}$ , to otrzymuje **0 punktów**.

**II sposób rozwiązania**

Zauważamy, że dla  $n > 1$  mamy  $a_n = S_n - S_{n-1}$ .

$$S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$$

Obliczamy  $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 2n - (n^2 - 4n + 3) = 2n - 3$  oraz  $a_1 = S_1 = -1$ .

Zauważamy ponadto, że wzór  $a_n = 2n - 3$  dla  $n = 1$  daje otrzymaną wartość  $a_1 = -1$ .

Zatem dla każdego  $n \geq 1$  otrzymujemy  $a_n = 2n - 3$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy zapisze, że  $a_n = S_n - S_{n-1}$ , wyznaczy  $S_{n-1} = (n-1)^2 - 2(n-1) = n^2 - 4n + 3$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy bezbłędnie wyznaczy  $n$ -ty wyraz ciągu:  $a_n = 2n - 3$ .

**Uwaga**

Przyznajemy **2 punkty** nawet wtedy, gdy zdający nie sprawdzi, czy  $a_1 = -1$ .

**III sposób rozwiązania**

Zauważamy, że  $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$  i wyznaczamy  $a_n = 2n - 4 - a_1$ .

Obliczamy  $a_1 = S_1 = -1$ . Stąd otrzymujemy  $a_n = 2n - 4 + 1$ , czyli  $a_n = 2n - 3$ .

**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje ..... 1 pkt**

gdy ze wzoru  $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$  wyznaczy  $a_n = 2n - 4 - a_1$  i na tym poprzestanie

lub dalej popełni błędy.

**Zdający otrzymuje ..... 2 pkt**

gdy wyznaczy  $n$ -ty wyraz ciągu:  $a_n = 2n - 3$ .

**Uwagi**

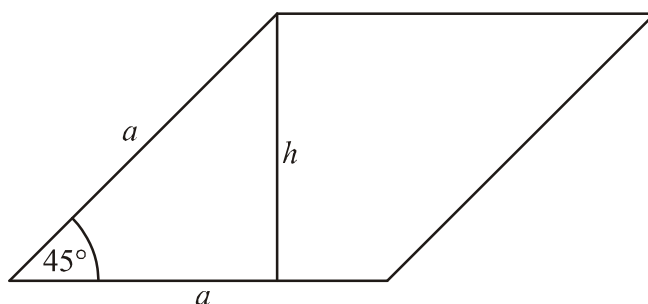
1. Zdający może od razu zapisać, że  $a_n = 2n - 4 - a_1$ .

2. Jeśli zdający zapisze, że  $\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = n^2 - 2n$ , wyznaczy z błędem rachunkowym  $a_n$  np.:

$a_n = 2n - 2 - a_1$  i z tym błędem doprowadzi rozwiązanie do końca, to otrzymuje **1 punkt**.

**Zadanie 31. (0–2)**

Użycie i tworzenie strategii	Wykorzystanie związków miarowych w figurach płaskich (IV.7.c)
------------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Z warunków zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a \cdot h = 50\sqrt{2} \\ \frac{h}{a} = \sin 45^\circ \end{cases}$$

Zatem  $h = a \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} a$  oraz  $a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a = 50\sqrt{2}$ .

Wobec tego  $a^2 = 100$ ,  $a = 10$ ,  $h = 10 \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$ .

Odpowiedź: Wysokość rombu jest równa  $5\sqrt{2}$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... 1 pkt  
gdy zapisze dwa związki między liczbami  $a$  i  $h$  i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje** ..... 2 pkt  
gdy poprawnie obliczy wysokość rombu  $h = 5\sqrt{2}$ .

**II sposób rozwiązania**

Ze wzoru na pole równoległoboku, gdy dane są jego dwa sąsiednie boki oraz kąt między nimi zawarty, mamy  $a^2 \cdot \sin 45^\circ = 50\sqrt{2}$ . Zatem  $a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50\sqrt{2}$ ,  $a^2 = 100$ ,  $a = 10$ .

Z innego wzoru na pole równoległoboku mamy  $a \cdot h = 50\sqrt{2}$ .

Wobec tego  $10 \cdot h = 50\sqrt{2}$  oraz  $h = 5\sqrt{2}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

**Zdający otrzymuje** ..... 1 pkt  
gdy poprawnie obliczy długość  $a$  boku rombu i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

**Zdający otrzymuje** ..... 2 pkt  
gdy poprawnie obliczy wysokość rombu  $h = 5\sqrt{2}$ .

**Zadanie 32. (0–4)**

Użycie i tworzenie strategii	Wyznaczenie punktu przecięcia się prostych prostopadłych (IV.8.b, 8.c, 8.d)
------------------------------	---

**I sposób rozwiązania**

Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :  $y = 2x + 7$ .

Wyznaczamy równanie prostej  $CD$  prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $C$ :

$$y = -\frac{1}{2}x + 17.$$

Zapisujemy układ równań: 
$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 17 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań i zapisujemy współrzędne punktu  $D$ :  $D = (4, 15)$ .

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania** ..... 1 pkt

- Wyznaczenie równania prostej  $AB$ :  $y = 2x + 7$
- albo
- obliczenie współczynnika kierunkowego prostej  $AB$ :  $a = 2$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**Wyznaczenie równania prostej  $CD$  prostopadłej do prostej  $AB$  i przechodzącej przez punkt  $C$ 

$$y = -\frac{1}{2}x + 17.$$

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**

Zapisanie układu równań: 
$$\begin{cases} y = 2x + 7 \\ y = -\frac{1}{2}x + 17 \end{cases}$$

**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**Rozwiązanie układu równań i zapisanie współrzędnych punktu  $D$ :  $D = (4, 15)$ .**Uwagi**

1. Jeśli zdający źle wyznaczy równanie prostej  $AB$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty** (współczynnik kierunkowy prostej  $AB$  powinien być jednak liczbą dodatnią).
2. Jeśli zdający odczyta współrzędne punktu  $D$  na podstawie dokładnie sporządzonego rysunku to otrzymuje **4 punkty**.
3. Jeśli zdający poda współrzędne punktu  $D$  bez dokładnego rysunku lub uzasadnienia to otrzymuje **0 punktów**.

**II sposób rozwiązania**Obliczamy pole trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = 15$ . Obliczamy długość podstawy  $AB$  trójkąta  $ABC$ :

$|AB| = 6\sqrt{5}$ . Ze związku  $P_{ABC} = \frac{1}{2}|CD| \cdot |AB|$  obliczamy wysokość  $CD$  trójkąta  $ABC$ :

$|CD| = \sqrt{5}$ . Wyznaczamy równanie prostej  $AB$ :  $y = 2x + 7$ . Zapisujemy współrzędne punktu

$D$  w zależności od zmiennej  $x$ :  $D = (x, 2x + 7)$ . Wyrażamy związek  $|CD| = \sqrt{5}$  za pomocą

równania  $\sqrt{(x-6)^2 + (2x+7-14)^2} = \sqrt{5}$ , gdzie  $x$  oznacza pierwszą współrzędną punktu  $D$ .

Rozwiązujemy równanie i otrzymujemy  $x = 4$ . Zapisujemy zatem współrzędne punktu  $D$ :

$D = (4, 15)$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .....1 pkt**Obliczenie pola trójkąta  $ABC$ :  $P_{ABC} = 15$ .**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp.....2 pkt**Obliczenie wysokości  $CD$  trójkąta  $ABC$ :  $|CD| = \sqrt{5}$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania.....3 pkt**Zapisanie współrzędnych punktu  $D$  w zależności od jednej zmiennej:  $D = (x, 2x + 7)$ i zapisanie równania  $\sqrt{(x-6)^2 + (2x+7-14)^2} = \sqrt{5}$ .**Rozwiązanie pełne .....4 pkt**Rozwiązanie równania i zapisanie współrzędnych punktu  $D$ :  $D = (4, 15)$ .**Uwaga**

Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pola trójkąta  $ABC$  i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

**Zadanie 33. (0–4)**

Użycie i tworzenie strategii	Zliczenie obiektów w prostej sytuacji kombinatorycznej (IV.10.b)
------------------------------	--

**I sposób rozwiązania**

Zauważamy, że dla poprawnego rozwiązania zadania istotne są **trzy grupy cyfr**: cyfra 7, cyfry parzyste bez zera oraz cyfry nieparzyste różne od 7.

- Miejsce dla cyfry 7 możemy wybrać na 5 sposobów.
- Miejsce dla cyfry parzystej możemy wybrać na 4 sposoby.
- Cyfrę parzystą do wpisania na wybranym miejscu możemy wybrać spośród 4 cyfr parzystych, czyli na 4 sposoby.
- Na pozostałych trzech miejscach możemy wpisać cyfry nieparzyste różne od 7.

Możemy to zrobić na  $4^3 = 64$  sposoby.

Zatem wszystkich liczb pięciocyfrowych spełniających warunki zadania jest:

$$5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 5 \cdot 4^5 = 5 \cdot 1024 = 5120.$$

**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

Obliczenie, na ile sposobów można ustawić cyfry z **dwóch grup cyfr** (spośród trzech rozważanych).

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie, na ile sposobów można ustawić cyfry z **trzech grup cyfr**:

- Miejsce dla cyfry 7 – na 5 sposobów.
- Miejsce dla cyfry parzystej – na 4 sposoby.
- Cyfrę parzystą do wpisania na wybranym miejscu – na 4 sposoby.
- Cyfry nieparzyste różne od 7 na pozostałych trzech miejscach – na  $4^3 = 64$  sposoby.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie, ile liczb pięciocyfrowych spełnia warunki zadania:  $5 \cdot 4^5 = 5120$ .

**II sposób rozwiązania**

Rozpatrujemy następujące trzy warianty ustawień cyfr:

- 1) na pierwszym miejscu cyfra 7, na jednym z czterech miejsc cyfra parzysta, a na każdym z pozostałych trzech miejsc cyfra nieparzysta różna od 7.

Każdą z czterech cyfr parzystych możemy umieścić **na jednym z czterech miejsc** na  $4 \cdot 4$  sposobów, zaś każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych (bez cyfry 7) możemy rozmieścić **na trzech miejscach** na  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$  sposobów. Zatem liczba możliwych ustawień cyfr w tym wariantcie równa się:  $4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024$ .

- 2) na pierwszym miejscu cyfra parzysta różna od 0, na jednym z czterech pozostałych miejsc cyfra 7, zaś na każdym z pozostałych trzech miejsc cyfra nieparzysta różna od 7.

Na pierwszym miejscu możemy ustawić **każdą z czterech cyfr parzystych różnych od zera**, zaś na **każdym z pozostałych czterech miejsc** możemy umieścić cyfrę 7, stąd otrzymujemy  $4 \cdot 4$  możliwości ustawień cyfry parzystej oraz cyfry 7. Natomiast każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych różnych od 7 możemy rozmieścić **na pozostałych trzech miejscach** na  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$  sposobów. Zatem liczba możliwych ustawień cyfr w tym wariantcie jest równa:

$$4 \cdot 4 \cdot 4^3 = 4^5 = 1024.$$

- 3) na pierwszym miejscu cyfra nieparzysta różna od 7, na jednym z pozostałych czterech miejsc cyfra parzysta, na jednym z trzech pozostałych miejsc cyfra 7, a na pozostałych dwóch miejscach cyfra nieparzysta różna od 7.

Każdą z czterech cyfr nieparzystych (różną od 7) możemy umieścić na pierwszym miejscu (4 sposoby). Na każdym z czterech pozostałych miejsc możemy umieścić każdą z czterech cyfr parzystych na  $4 \cdot 4$  sposobów. Cyfrę 7 możemy umieścić na każdym z trzech pozostałych miejsc, zaś każdą z czterech pozostałych cyfr nieparzystych różnych od 7 umieścimy na dwóch miejscach na  $3 \cdot 4 \cdot 4 = 3 \cdot 4^2$  sposobów. Zatem, w tym wariantcie, liczba możliwych ustawień jest równa:  $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4^2 = 3 \cdot 4^5 = 3072$ .

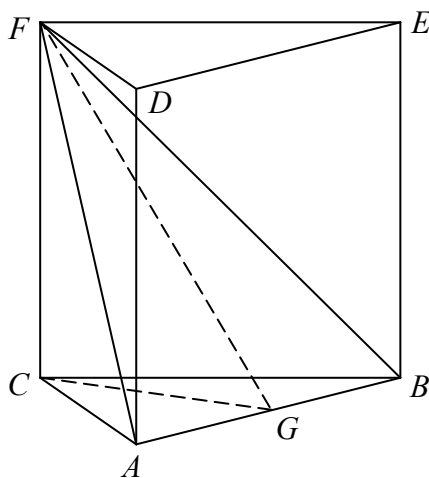
Liczba wszystkich możliwych ustawień jest sumą liczb ustawień w poszczególnych wariantach i równa się:  $1024 + 1024 + 3072 = 5120$ .

### **Schemat oceniania II sposobu rozwiązania**

Przyznajemy po **1 punkcie** za obliczenie liczby możliwych ustawień cyfr w każdym z trzech wariantów i **1 punkt** za obliczenie sumy tych możliwości.

### **Zadanie 34. (0–4)**

Użycie i tworzenie strategii	Obliczenie objętości graniastosłupa z zastosowaniem związków miarowych w wielościanach (IV.9.b)
------------------------------	---



### **I sposób rozwiązania**

Niech  $G$  będzie środkiem krawędzi  $AB$ . Rysujemy wysokość  $FG$  trójkąta  $ABF$ .

Pole trójkąta  $ABF$  jest równe:  $P_{ABF} = \frac{|AB| \cdot |FG|}{2} = \frac{8 \cdot |FG|}{2} = 4 \cdot |FG| = 52$ . Stąd  $|FG| = 13$ .

W trójkącie równobocznym  $ABC$  mamy  $|CG| = 4\sqrt{3}$ . Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $FCG$  do obliczenia  $|CF|$ :  $|CF|^2 + |CG|^2 = |FG|^2$ , stąd  $|CF| = 11$ .

Obliczamy objętość graniastosłupa:  $V = \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |CF| = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$ .



**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**

- Narysowanie wysokości  $CG$  trójkąta  $ABC$  i obliczenie długości odcinka  $CG$  – wysokości trójkąta równobocznego  $ABC$ , podstawy graniastoslupa prawidłowego:  $|CG| = 4\sqrt{3}$

albo

- obliczenie wysokości trójkąta  $ABF$ :  $|FG| = 13$ .

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**

- Narysowanie wysokości  $CG$  trójkąta  $ABC$  i obliczenie długości odcinka  $CG$  – wysokości trójkąta równobocznego  $ABC$ , podstawy graniastoslupa prawidłowego:  $|CG| = 4\sqrt{3}$

oraz

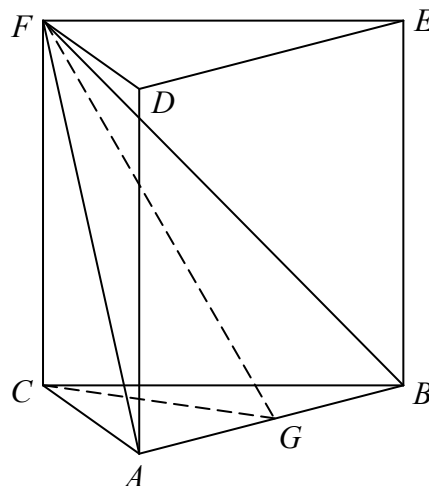
- obliczenie wysokości trójkąta  $ABF$ :  $|FG| = 13$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**

Obliczenie wysokości  $CF$  graniastoslupa prawidłowego trójkątnego  $ABCDEF$ :  $|CF| = 11$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**

Obliczenie objętości graniastoslupa:  $V = 176\sqrt{3}$ .



**II sposób rozwiązania**

Niech  $G$  będzie środkiem krawędzi  $AB$ . Rysujemy wysokość  $FG$  trójkąta  $ABF$ .

Pole trójkąta  $ABF$ :  $P_{ABF} = \frac{|AB| \cdot |FG|}{2} = 52$ , stąd  $|FG| = 13$ .

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $AFG$  i obliczamy kwadrat długości odcinka  $AF$ :  $|AF|^2 = 13^2 + 4^2 = 185$ .

Następnie korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie  $ACF$ , aby obliczyć wysokość graniastoslupa  $CF$ :  $|CF|^2 + |AC|^2 = |AF|^2$ , czyli  $|CF|^2 = 185 - 64 = 121$ . Zatem  $|CF| = 11$ .

Obliczamy objętość graniastoslupa:  $V = \frac{|AB|^2 \sqrt{3}}{4} \cdot |CF| = \frac{64 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 11 = 176\sqrt{3}$ .

**Schemat oceniania II sposobu rozwiązania****Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 pkt**Obliczenie wysokości  $FG$  trójkąta  $ABF$ :  $|FG| = 13$ .**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 pkt**Obliczenie długości przekątnej ściany bocznej lub kwadrat jej długości:  $|AF|^2 = 185$ .**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 pkt**Obliczenie wysokości  $CF$  graniastosłupa:  $|CF| = 11$ .**Rozwiązanie pełne ..... 4 pkt**Obliczenie objętości graniastosłupa:  $V = 176\sqrt{3}$ .