Centralna Komisja Egzaminacyjna

EGZAMIN MATURALNY 2012

MATEMATYKA

POZIOM PODSTAWOWY

Kryteria oceniania odpowiedzi

SIERPIEŃ 2012

Zadanie 1. (0–1)

Zakres umiejętności (standardy)	Opis wymagań	Poprawna odpowiedź (1 p.)
Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonuje obliczenia procentowe; wykorzystuje własności figur podobnych.	**C**

Zadanie 2. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych; oblicza potęgi o wykładniku wymiernym.	**C**

Zadanie 3. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza wartości logarytmu.	**D**

Zadanie 4. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykonuje obliczenia z wykorzystaniem wzorów skróconego mnożenia.	**D**

Zadanie 5. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznacza wzór funkcji liniowej.	**B**

Zadanie 6. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje pojęcia wartości bezwzględnej i jej interpretacje geometryczną; zaznacza na osi liczbowej zbiory opisane nierównością.	**A**

Zadanie 7. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli.	**B**

Zadanie 8. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Odczytuje z wykresu zbiór wartości funkcji.	**B**

Zadanie 9. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązuje nierówności kwadratowe; zapisuje rozwiązanie w postaci przedziałów liczbowych.	**A**

Zadanie 10. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozkłada wielomian na czynniki stosując grupowanie wyrazów.	**B**

Zadanie 11. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Rozwiązuje proste równanie wymierne.	**B**

Zadanie 12. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wyznacza wyraz ciągu określonego wzorem ogólnym.	**D**

Zadanie 13. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza n-ty wyraz ciągu geometrycznego.	**C**

Zadanie 14. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Znając wartość jednej funkcji trygonometrycznej wyznacza wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych.	**C**

Zadanie 15. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje definicje funkcji trygonometrycznych i wyznacza wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów ostrych.	**A**

Zadanie 16. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Znajduje i wykorzystuje związki miarowe w figurach płaskich.	**B**

Zadanie 17. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wykorzystuje związki między kątem wpisanym i środkowym do obliczenia miary kąta.	**C**

Zadanie 18. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Znajduje i wykorzystuje związki miarowe w figurach płaskich; wyznacza promień okręgu wpisanego w trójkąt równoboczny mając daną długość boku trójkąta.	**C**

Zadanie 19. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Wskazuje równania prostej prostopadłej do danej.	**A**

Zadanie 20. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza odległość punktów w układzie współrzędnych; oblicza pole kwadratu.	**B**

Zadanie 21. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Posługuje się postacią równania okręgu; z zapisu równania okręgu odczytuje współrzędne jego środka.	**D**

Zadanie 22. (0–1)

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza związki miarowe w wielościanach; wykorzystuje związek miedzy polem powierzchni całkowitej sześcianu a jego objętością.	**C**

Zadanie **23. (0–1)**

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Wyznacza związki miarowe w bryłach obrotowych; na podstawie danych przekroju osiowego stożka oblicza jego objętość.	**D**

Zadanie 24. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Oblicza medianę podanych danych liczbowych.	**B**

Zadanie 25. (0–1)

Wykorzystanie i tworzenie informacji	Stosuje definicję prawdopodobieństwa; oblicza prawdopodobieństwo zdarzeń.	**B**

Zadanie 26. (0–2)

Rozwiąż nierówność $x^2 - 8x + 7 \geq 0$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązuje nierówność kwadratową.

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:
- prawidłowo obliczy pierwiastki trójmianu kwadratowego $x_1 = 1$, $x_2 = 7$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- rozłoży trójmian kwadratowy $x^2 - 8x + 7$ na czynniki liniowe i zapisze nierówność $(x-1)(x-7) \geq 0$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy

albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwiastków trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność

albo
- doprowadzi nierówność do postaci $|x-4| \geq 3$ (na przykład z postaci $(x-4)^2 - 9 \geq 0$ otrzymuje $(x-4)^2 \geq 9$, a następnie $|x-4| \geq 3$) i na tym poprzestanie lub dalej popełni błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy poda zbiór rozwiązań nierówności w postaci:
- $(-\infty, 1\rangle \cup \langle 7, \infty)$

albo
- $x \leq 1$ lub $x \geq 7$

albo
- $x \leq 1$, $x \geq 7$

albo
- w postaci graficznej z poprawnie zaznaczonymi końcami przedziałów.

__**Uwaga:**__
W związku z rozbieżnością w rozumieniu i używaniu spójników w języku potocznym i formalnym języku matematyki akceptujemy zapis, np. $x \in (-\infty, 1\rangle$ i $x \in \langle 7, +\infty)$.

__**Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki**__

1. Jeśli zdający poprawnie obliczy pierwiastki trójmianu $x = 7$, $x = 1$ i zapisze np. $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 7, +\infty)$, popełniając tym samym błąd przy przepisywaniu jednego z pierwiastków, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeśli zdający pomyli porządek liczb na osi liczbowej, np. zapisze zbiór rozwiązań nierówności w postaci $(-\infty, 7\rangle \cup \langle 1, \infty)$, to przyznajemy **2 punkty**.

Zadanie 27. (0–2)
Rozwiąż równanie $x^3 - 6x^2 - 9x + 54 = 0$.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Rozwiązuje równanie wielomianowe.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:
- przedstawi lewą stronę równania w postaci iloczynu $\left(x^2-9\right)\left(x-6\right)$ lub $\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x-6\right)$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo
- sprawdzi, że liczba -3 jest jednym z rozwiązań równania, podzieli wielomian $x^3-6x^2-9x+54$ przez dwumian $\left(x+3\right)$ i otrzyma $\left(x^2-9x+18\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo
- sprawdzi, że liczba 3 jest jednym z rozwiązań równania, podzieli wielomian $x^3-6x^2-9x+54$ przez dwumian $\left(x-3\right)$ i otrzyma $\left(x^2-3x-18\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo
- sprawdzi, że liczba 6 jest jednym z rozwiązań równania, podzieli wielomian $x^3-6x^2-9x+54$ przez dwumian $\left(x-6\right)$ i otrzyma $\left(x^2-9\right)$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=-3$, $x=3$, $x=6$.

Zadanie 28. (0–2)
Pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego jest równy 3, czwarty wyraz tego ciągu jest równy 15. Oblicz sumę sześciu początkowych wyrazów tego ciągu.

Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji	Oblicza sumę *n* początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy:
- obliczy różnicę ciągu arytmetycznego ($r=4$) i na tym poprzestanie lub błędnie wyznaczy S_6

albo
- obliczy lub zapisze poprawnie jeden z pozostałych wyrazów ciągu i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy

albo
- popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu r i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy S_6.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy $S_6 = 78$.

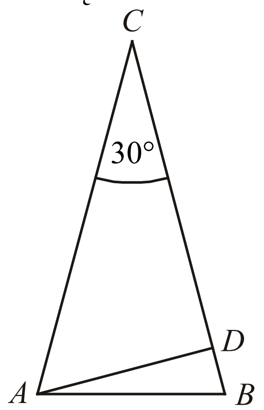
Uwaga:

Zdający otrzymuje **0 punktów**, jeżeli:

- błędnie zapisze związek między a_1, a_4 i r, np. $a_1 + 4r = 15$ i konsekwentnie do tego błędu wyznaczy S_6,
- zacytuje odpowiednie wzory, np. $a_4 = a_1 + 3r$ lub $S_6 = \frac{2a_1 + 5r}{2} \cdot 6$ i na tym poprzestanie.

Zadanie 29. (0–2)

W trójkącie równoramiennym ABC dane są $|AC| = |BC| = 6$ i $|\sphericalangle ACB| = 30°$ (zobacz rysunek). Oblicz wysokość AD trójkąta opuszczoną z wierzchołka A na bok BC.



Użycie i tworzenie strategii	Znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem trygonometrii.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje .... 1 pkt

gdy zapisze zależność, z której można obliczyć wysokość $|AD|$, np.:

$$\sin 30° = \frac{|AD|}{6} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot 6.$$

Zdający otrzymuje .... 2 pkt

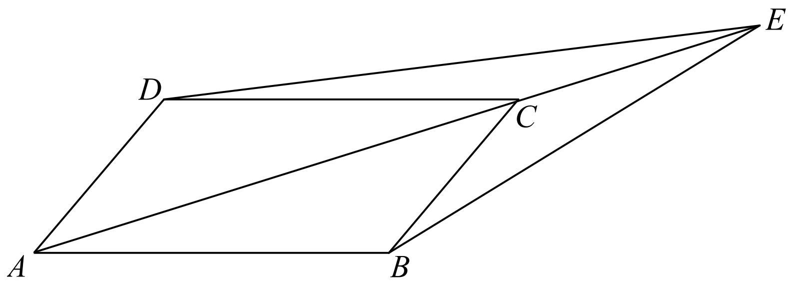
gdy obliczy wysokość opuszczoną z wierzchołka A na bok BC: $|AD| = 3$.

Uwaga:

Jeśli zdający od razu zapisze, że $|AD| = 3$, to otrzymuje **2 punkty.**

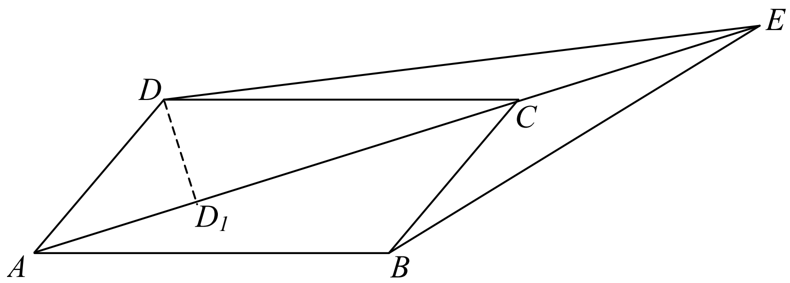
Zadanie 30. (0–2)

Dany jest równoległobok *ABCD*. Na przedłużeniu przekątnej *AC* wybrano punkt *E* tak, że $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$ (zobacz rysunek). Uzasadnij, że pole równoległoboku *ABCD* jest cztery razy większe od pola trójkąta *DCE*.



Rozumowanie i argumentacja	Znajduje związki miarowe w figurach płaskich; wykorzystuje związek między polami trójkątów o takiej samej wysokości.

__Rozwiązanie__



Rysujemy wysokość DD_1 trójkąta *ACD*. Wysokość DD_1 jest również wysokością trójkąta *DCE* o podstawie *CE*.

$P_{DCE} = \frac{1}{2}|CE| \cdot |DD_1|$

Ponieważ $|CE| = \frac{1}{2}|AC|$, więc $P_{DCE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |DD_1| = \frac{1}{2} P_{ACD}$.

$P_{ABCD} = 2P_{ACD} = 4P_{DCE}$.

__Schemat oceniania__

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze związek między polem trójkąta *ACD*, a polem trójkąta *DCE*, np.: $P_{DCE} = \frac{1}{2} P_{ACD}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy wykaże, że $P_{ABCD} = 4P_{DCE}$.

Zadanie 31. (0–2)
Wykaż, że jeżeli $c<0$, to trójmian kwadratowy $y=x^2+bx+c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

Rozumowanie i argumentacja	Bada funkcję kwadratową.

<u>Rozwiązanie</u>

Zapisujemy wyróżnik danego trójmianu kwadratowego: $\Delta=b^2-4c$.

Ponieważ $c<0$ to $-4c>0$. Stąd Δ jest sumą dwóch wyrażeń: nieujemnego i dodatniego, czyli jest dodatnia.

A zatem trójmian $y=x^2+bx+c$ ma dwa różne miejsca zerowe.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje .... 2 pkt
gdy uzasadni, że trójmian ma dwa różne miejsca zerowe.

<u>Uwaga:</u>

Jeżeli zdający podstawi konkretną wartość w miejsce *c*, to otrzymuje **0 punktów.**

Zadanie 32. (0–4)
Dany jest trójkąt równoramienny *ABC*, w którym $|AC|=|BC|$ oraz $A=(2,1)$ i $C=(1,9)$. Podstawa *AB* tego trójkąta jest zawarta w prostej $y=\frac{1}{2}x$. Oblicz współrzędne wierzchołka *B*.

Użycie i tworzenie strategii	Oblicza odległość między punktami, wyznacza środek odcinka, interpretuje współczynniki funkcji liniowej, wyznacza miejsca zerowe funkcji kwadratowej.

<u>I sposób rozwiązania</u>: (*odległość*)

Punkt *B* leży na prostej o równaniu $y=\frac{1}{2}x$, więc jego współrzędne można zapisać w postaci $B=\left(x,\frac{1}{2}x\right)$. Obliczamy odległość punktu *C* od punktu *A*: $|AC|=\sqrt{65}$ oraz odległość punktu *C* od punktu *B*: $|BC|=\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{x}{2}-9\right)^2}$. Ponieważ $|AC|=|BC|$, więc możemy zapisać równanie z jedną niewiadomą $\sqrt{(x-1)^2+\left(\frac{x}{2}-9\right)^2}=\sqrt{65}$, skąd otrzymujemy równanie kwadratowe $\frac{5}{4}x^2-11x+17=0$ lub $5x^2-44x+68=0$. Równanie to ma dwa rozwiązania $x = \frac{34}{5}$ lub $x = 2$. Ponieważ drugie rozwiązanie tego równania prowadzi do punktu o współrzędnych $(2,1)$, co oznacza, że otrzymujemy podany w treści zadania punkt A, zatem szukany punkt $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania...1 pkt

Obliczenie odległości AC: $|AC| = \sqrt{65}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 pkt

- zapisanie równania $\sqrt{(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2} - 9\right)^2} = \sqrt{65}$ lub $(x-1)^2 + \left(\frac{x}{2} - 9\right)^2 = 65$ lub $(2y-1)^2 + (y-9)^2 = 65$

albo

- zapisanie układu równań: $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ \sqrt{(x-1)^2 + (y-9)^2} = \sqrt{65} \end{cases}$ lub $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-1)^2 + (y-9)^2 = 65 \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania..3 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego, np. $\frac{5}{4}x^2 - 11x + 17 = 0$ lub $5x^2 - 44x + 68 = 0$ lub $5y^2 - 22y + 17 = 0$.

Rozwiązanie pełne..4 pkt

Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$.

<u>II sposób rozwiązania:</u> (*środek odcinka*)

Niech punkt D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C. Wyznaczamy równanie prostej CD: $y = -2x + 11$. Obliczamy współrzędne punktu $D = \left(\frac{22}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

Wyznaczamy współrzędne punktu B:

- wykorzystując na przykład wzór na współrzędne środka odcinka: $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{22}{5} \\ \frac{y+1}{2} = \frac{11}{5} \end{cases}$

albo

- wykorzystując wzór na współrzędne środka odcinka i równanie prostej: $\begin{cases} \frac{x+2}{2} = \frac{22}{5} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$

albo

- porównując długości odcinków *AD* i *DB*:

$$\begin{cases} \sqrt{\left(\frac{22}{5}-2\right)^2+\left(\frac{11}{5}-1\right)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{22}{5}\right)^2+\left(y-\frac{11}{5}\right)^2} \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$$

Otrzymujemy $B=\left(\frac{34}{5},\frac{17}{5}\right)$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Wyznaczenie równania prostej *CD*, np. w postaci $y=-2x+11$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu *D*: $D=\left(\frac{22}{5},\frac{11}{5}\right)$.

<u>Uwaga:</u>

Jeżeli zdający zapisze układ równań: $\begin{cases} y=-2x+11 \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$ lub analogiczny i popełni błąd rachunkowy w jego rozwiązaniu, to otrzymuje **2 punkty**.

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka $B=\left(\frac{34}{5},\frac{17}{5}\right)$.

<u>III sposób rozwiązania:</u> (*kąt między prostymi*)

Wyznaczamy współczynnik kierunkowy prostej *AC*: $a_1=-8$. Zapisujemy równanie: $\left|\frac{\frac{1}{2}+8}{1-4}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-a_2}{1+\frac{1}{2}a_2}\right|$, korzystając ze wzoru na tangens kąta między prostymi *AC* i *BC*, gdzie a_2 jest współczynnikiem kierunkowym prostej *BC*. Obliczamy a_2: $a_2=-\frac{28}{29}$ (drugie rozwiązanie tego równania $a_2=-8$ to współczynnik kierunkowy prostej *AC*). Zapisujemy równanie prostej *BC*: $y=-\frac{28}{29}(x-1)+9$, a następnie wyznaczamy punkt wspólny tej prostej i prostej *AB* o równaniu $y=\frac{1}{2}x$. Rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} y = -\frac{28}{29}(x-1)+9 \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

Otrzymujemy współrzędne szukanego punktu: $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$.

Schemat oceniania III sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie równania z niewiadomym współczynnikiem kierunkowym prostej BC:

$$\left|\frac{\frac{1}{2}+8}{1-4}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}-a_2}{1+\frac{1}{2}a_2}\right|$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Wyznaczenie współczynnika kierunkowego prostej BC: $a_2 = -\frac{28}{29}$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

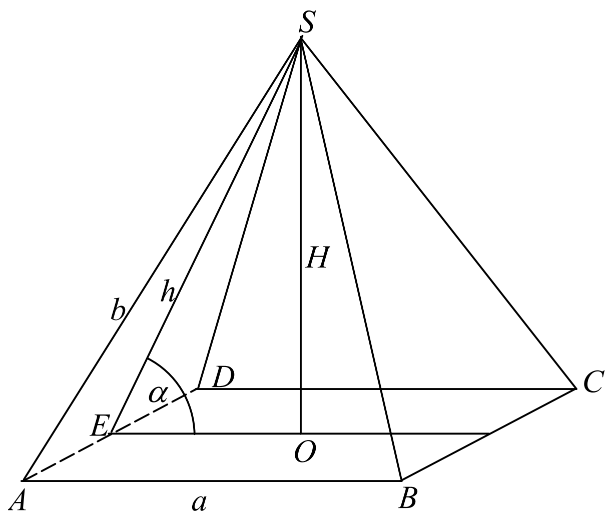
Wyznaczenie współrzędnych wierzchołka $B = \left(\frac{34}{5}, \frac{17}{5}\right)$ jako punktu wspólnego prostych o równaniach $y = \frac{1}{2}x$ oraz $y = -\frac{28}{29}(x-1)+9$.

Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki

Jeśli zdający przepisze z błędem współrzędne punktów lub zamieni miejscami liczby będące współrzędnymi danych punktów i rozwiąże konsekwentnie zadanie do końca, to za takie rozwiązanie otrzymuje **4 punkty.**

Zadanie 33. (0–4)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym *ABCDS* o podstawie *ABCD* i wierzchołku *S* trójkąt *ACS* jest równoboczny i ma bok długości 8. Oblicz sinus kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy tego ostrosłupa (zobacz rysunek).



Użycie i tworzenie strategii	Wyznacza związki miarowe w wielościanach; znajduje związki miarowe w figurach płaskich, w tym stosuje własności trójkąta równobocznego i prostokątnego i wykorzystuje definicję i własności funkcji trygonometrycznych.

<u>I sposób rozwiązania:</u>

1) Obliczenie H (wysokości ostrosłupa), np. z własności trójkąta równobocznego *ACS*:
$H = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, gdzie $b = 8$

lub z trójkąta prostokątnego *AOS* : $H = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

Zdający może wykonać obliczenia i zapisać wynik w przybliżeniu: $H \approx 6,93$.

2) Obliczenie a (długości krawędzi podstawy ostrosłupa), np. ze wzoru na długość przekątnej kwadratu: $a\sqrt{2} = 8$, $a = 4\sqrt{2}$ lub $a \approx 5,66$.

3) Obliczenie $h = |SE|$ (wysokości ściany bocznej) z trójkąta prostokątnego *SOE*:
$h = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, $h = 2\sqrt{14}$

lub z trójkąta prostokątnego *SEA*: $h = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Zdający może wykonać obliczenia i zapisać wynik w przybliżeniu: $h \approx 7,48$.

4) Obliczenie sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{H}{h} = \frac{\sqrt{42}}{7}$

lub obliczenie cosinusa kąta α, np. z twierdzenia cosinusów: $h^2 = a^2 + h^2 - 2ah\cos\alpha$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{7}$, a następnie sinusa kąta α, np. z jedynki trygonometrycznej: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{7}{49}} = \frac{\sqrt{42}}{7}$

lub wykorzystanie dokonanych przybliżeń do obliczenia $\sin\alpha \approx 0,93$.

<u>**Schemat oceniania I sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

- obliczenie H (wysokości ostrosłupa): $H = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ lub $H \approx 6,93$

albo

- obliczenie a (długości krawędzi podstawy): $a = 4\sqrt{2}$ lub $a \approx 5,66$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania...3 pkt

- obliczenie h (wysokości ściany bocznej ostrosłupa): $h = 2\sqrt{14}$ lub $h \approx 7,48$

oraz

- obliczenie H (wysokości ostrosłupa): $H = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ lub $H \approx 6,93$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki ....2 pkt

Rozwiązanie pełne...4 pkt

Obliczenie sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$ lub $\sin\alpha \approx 0,93$.

<u>**II sposób rozwiązania**</u>**:**

1) Obliczenie H (wysokości ostrosłupa), np. z własności trójkąta równobocznego ACS $H = \frac{b\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, gdzie $b = 8$

lub z trójkąta prostokątnego AOS: $H = \sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

Zdający może wykonać obliczenia i zapisać wynik w przybliżeniu: $H \approx 6,93$.

2) Obliczenie a (długości krawędzi podstawy ostrosłupa), np. ze wzoru na długość przekątnej kwadratu $a\sqrt{2} = 8$, $a = 4\sqrt{2}$ lub $a \approx 5,66$.

3) Obliczenie tangensa kąta α: $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{\frac{a}{2}} = \frac{2H}{a} = \sqrt{6}$ lub $\mathrm{tg}\alpha \approx 2,45$.

4) Odczytanie wartości kąta α: $\alpha \approx 68^\circ$ i sinusa tego kąta z tablic trygonometrycznych: $\sin\alpha \approx 0,93$

lub obliczenie $\sin\alpha$ z układu równań: $\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{6} \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$

Stąd $\sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$.

__Schemat oceniania II sposobu rozwiązania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania .... 1 pkt

- obliczenie *H* (wysokości ostrosłupa): $H = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ lub $H \approx 6,93$

albo

- obliczenie *a* (długości krawędzi podstawy): $a = 4\sqrt{2}$ lub $a \approx 5,66$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Obliczenie tangensa kąta α: $\mathrm{tg}\alpha = \sqrt{6}$ lub $\mathrm{tg}\alpha \approx 2,45$.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe, usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie pełne .... 4 pkt

Obliczenie sinusa kąta α: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{42}}{7}$ lub $\sin\alpha \approx 0,93$.

__Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki__

Nie obniżamy punktacji za rozwiązanie, w którym zdający poprawnie obliczył wysokość ostrosłupa, ale przy obliczaniu sinusa kąta nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy podstawił błędną wartość.

Zadanie 34. (0–5)

Kolarz pokonał trasę 114 km. Gdyby jechał ze średnią prędkością mniejszą o 9,5 km/h, to pokonałby tę trasę w czasie o 2 godziny dłuższym. Oblicz, z jaką średnią prędkością jechał ten kolarz.

Modelowanie matematyczne	Rozwiązuje zadania dotyczących sytuacji praktycznych, prowadzące do równania kwadratowego.

__I sposób rozwiązania:__

Przyjmujemy oznaczenia, np.: t – czas pokonania całej trasy w godzinach, v – średnia prędkość w kilometrach na godzinę. Zapisujemy zależności między czasem a prędkością w obu sytuacjach opisanych w zadaniu: $v \cdot t = 114$ oraz $(v - 9,5)\cdot(t + 2) = 114$.

Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} v \cdot t = 114 \\ (v-9,5)\cdot(t+2) = 114 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$\left(\frac{114}{t} - 9,5\right)\cdot(t+2) = 114$

$114 + \frac{228}{t} - 9,5 \cdot t - 19 = 114$

Mnożymy obie strony przez t:

$9,5t^2 + 19t - 228 = 0$

Dzielimy obie strony przez 9,5:

$t^2 + 2t - 24 = 0$

$(t+6)\cdot(t-4) = 0$

$t_1 = -6$ lub $t_2 = 4$

t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość, z jaką jechał kolarz: $v = \frac{114}{4} = 28,5$.

<u>II sposób rozwiązania</u>:

Zapisujemy zależności między czasem a prędkością w obu sytuacjach opisanych w zadaniu:

$v \cdot t = 114$ oraz $(v-9,5)\cdot(t+2) = 114$

Następnie zapisujemy układ równań $\begin{cases} v \cdot t = 114 \\ (v-9,5)\cdot(t+2) = 114 \end{cases}$

Rozwiązując układ równań doprowadzamy do równania z jedną niewiadomą, np.:

$(v-9,5)\cdot\left(\frac{114}{v} + 2\right) = 114$

$114 + 2v - \frac{1083}{v} - 19 = 114$

Mnożymy obie strony przez v

$2v^2 - 19v - 1083 = 0$

$\Delta = 19^2 + 8 \cdot 1083 = 9025$

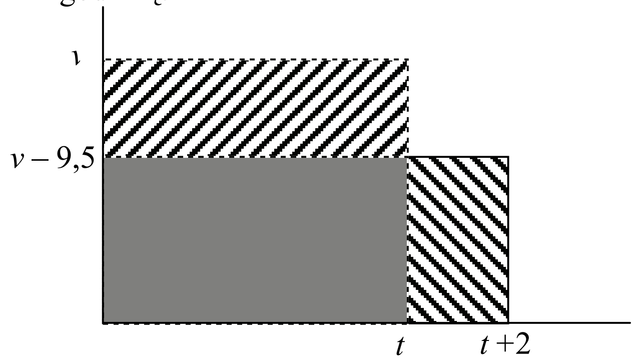
$\sqrt{\Delta} = 95$

$v_1 = \frac{19-95}{4} \qquad v_2 = \frac{19+95}{4} = \frac{114}{4} = 28,5$

v_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

<u>III sposób rozwiązania</u>:
Przyjmujemy oznaczenia, np.: t – czas pokonania całej trasy w godzinach, v – średnia prędkość w kilometrach na godzinę.



Narysowane duże prostokąty reprezentują trasę przebytą przez kolarza w obu sytuacjach opisanych w zadaniu, mają zatem równe pola. Wobec tego pola zakreskowanych prostokątów są równe. Stąd równość $9,5\cdot t = 2\left(v-9,5\right)$ i następnie $9,5\left(t+2\right)=2v$ i $v=4,75\left(t+2\right)$.
Ponieważ trasa przebyta przez kolarza ma długość 114 km, otrzymujemy równanie:
$4,75\left(t+2\right)\cdot t = 114$

$4,75t^2+9,5t-114=0$.
Dzielimy obie strony przez 4,75:
$t^2+2t-24=0$
$\left(t+6\right)\cdot\left(t-4\right)=0$
$t_1=-6$ lub $t_2=4$
t_1 jest sprzeczne z warunkami zadania.

Obliczamy średnią prędkość, z jaką jechał kolarz: $v=\frac{114}{4}=28,5$.
Odp. Średnia prędkość, z jaką jechał kolarz, jest równa 28,5 km/godzinę.

<u>Schemat oceniania I, II i III sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

Zapisanie równania w sytuacji domniemanej (t oznacza czas pokonania całej trasy w godzinach, a v średnią prędkość rowerzysty w kilometrach na godzinę)
$\left(t+2\right)\cdot\left(v-9,5\right)=114$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi v i t, np.:
$$\begin{cases} t\cdot v = 114 \\ \left(t+2\right)\cdot\left(v-9,5\right)=114 \end{cases}$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą v lub t, np.:
$\left(\frac{114}{t}-9,5\right)\cdot\left(t+2\right)=114$ lub $\left(v-9,5\right)\cdot\left(\frac{114}{v}+2\right)=114$ lub $4,75\left(t+2\right)\cdot t=114$

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może bezpośrednio zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Zostały pokonane zasadnicze trudności zadania, ale w trakcie ich pokonywania zostały popełnione błędy rachunkowe lub usterki .... 2 pkt

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

- obliczenie czasu: $t=4$ lub $t=-6$ i nie obliczenie prędkości lub obliczenie prędkości z błędem rachunkowym

albo

- obliczenie czasu: $t=4$ lub $t=-6$ i obliczenie prędkości: $v=28,5$ i $v=-19$ i niewyeliminowanie prędkości niezgodnej z warunkami zadania

albo

- obliczenie czasu z błędem rachunkowym i konsekwentne obliczenie prędkości

albo

- rozwiązanie równania z niewiadomą v z błędem rachunkowym.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Obliczenie średniej prędkości, z jaką jechał kolarz: $v=28,5\,\text{km/godzinę}$.

<u>Uwagi:</u>

1. Jeżeli zdający porównuje wielkości różnych typów, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający odgadnie średnią prędkość jazdy kolarza i nie uzasadni, że jest to jedyne rozwiązanie, to otrzymuje **1 punkt**.

<u>Kryteria oceniania uwzględniające specyficzne trudności w uczeniu się matematyki</u>

Przykład 1.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość kolarza, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez kolarza

$$v-9,5=\frac{114}{t+2}$$

$$\begin{cases}114=v\cdot t\\ 114=(v-9,5)t+2\end{cases}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp** i przyznajemy **2 punkty**, mimo że w drugim równaniu układu zdający nie ujął wyrażenia $t+2$ w nawias. Zapis równania $v-9,5=\frac{114}{t+2}$ wskazuje na poprawną interpretację zależności między wielkościami.

Przykład 2.
Jeśli zdający przedstawi następujące rozwiązanie:

v - prędkość kolarza, t - czas pokonania całej trasy w godzinach przez kolarza

$$v-9,5=\frac{114}{t+2} \qquad \begin{cases} v=\dfrac{114}{t} \\ v-9,5=\dfrac{210}{t+} \end{cases} \qquad \frac{411}{t}-9,5=\frac{114}{t+}$$

i na tym zakończy, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Pokonanie zasadniczych trudności zadania** i przyznajemy **3 punkty,** mimo że w równaniu $\frac{411}{t}-9,5=\frac{114}{t+}$ zdający przestawił cyfry w zapisie liczby 114 i pominął liczbę 2 w mianowniku ułamka.

Przykład 3.
Jeśli zdający otrzyma inne równanie kwadratowe, np. $2v^2+19v-1083=0$ zamiast równania $2v^2-19v-1083=0$ (np. w wyniku złego przepisania znaku lub liczby), konsekwentnie jednak rozwiąże otrzymane równanie kwadratowe, odrzuci ujemne rozwiązanie i pozostawi wynik, który może być realną prędkością jazdy kolarza, to takie rozwiązanie kwalifikujemy do kategorii **Rozwiązanie pełne** i przyznajemy **5 punktów**.