Aufgabe A 1.1 (HT 2008, I 3, gekürzt und modifiziert)

Ein Fass mit Zu- und Ablauf besitzt ein Fassungsvermögen von 1200 Liter.

a) Die enthaltene Wassermenge zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch die Funktion f mit $f(t) = 1000 - 800 \cdot e^{-0,01t}$; $t \geq 0$ (t in Minuten, $f(t)$ in Liter).

Zu welchem Zeitpunkt ist das Fass zur Hälfte gefüllt?
Zeigen Sie, dass die Wassermenge im Fass stets zunimmt.
Weisen Sie nach, dass das Fass nicht überläuft.
Bestimmen Sie die mittlere Wassermenge während der ersten Stunde. (6 VP)

b) Bei einem anderen Füllvorgang befinden sich zunächst 800 Liter Wasser im Fass.
Die momentane Abflussrate beträgt 0,5% des jeweiligen Inhalts pro Minute.
Die Zuflussrate ist konstant.
Wie viele Liter pro Minute müssen zufließen, damit sich die Wassermenge im Fass nicht ändert?
Die Zuflussrate wird jetzt so gewählt, dass auf lange Sicht das Fass nicht überläuft, aber immer mindestens zur Hälfte gefüllt ist.
Welche Werte für die Zuflussrate sind dafür möglich? (4 VP)

Aufgabe A 1.2

Gegeben ist für jedes $k \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_k mit $f_k(x) = x + k \cdot \frac{1}{x}$.

Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen von f_k in Abhängigkeit von k. (5 VP)

alternativ:

Aufgabe A 1.2* (HT 2006, I 2.2 a)

Für jedes $a>0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

Wie wirkt sich eine Veränderung des Parameters a auf den Graphen von f_a aus?

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse zwischen zwei benachbarten Nullstellen einschließt. (5 VP)

Aufgabe A 2.1 (NT 2006, I 3.1, leicht gekürzt)

In einem Land mit ca. 6,0 Millionen Haushalten gab es zu Beginn des Jahres 2004 etwa 3,0 Millionen Haushalte mit einem DVD-Player.

Die Entwicklung der Anzahlen (in Millionen) seit dem Jahr 2000 kann modellhaft durch eine Funktion g dargestellt werden, die für $x \geq 0$ der Differenzialgleichung

$$g'(x) = 0{,}2 \cdot \left(5{,}2 - g(x)\right) \text{ genügt.}$$

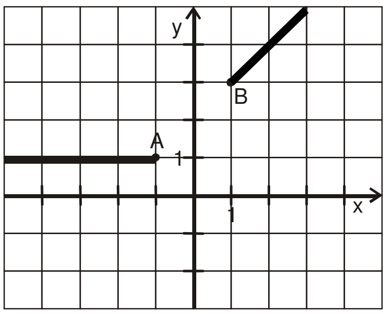
Dabei ist x die Anzahl der seit Beginn des Jahres 2000 vergangenen Jahre.

a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Funktion g.
Mit welcher Anzahl von Haushalten mit DVD-Playern ist langfristig zu rechnen?
Zu welchem Zeitpunkt steht in 70% der Haushalte des Landes ein DVD-Player?
Bestimmen Sie die mittlere Anzahl von Haushalten mit DVD-Player von Mitte 2004 bis zu diesem Zeitpunkt.
Wann lag die Änderungsrate der Anzahlen erstmals unter 0,6 Millionen pro Jahr?
(7 VP)

b) Welche Größe wird durch $g'(4)$ beschrieben?
Erläutern Sie, wie man nur mit Hilfe von $g'(4)$ und $g(4)$ einen Näherungswert für $g(4{,}5)$ berechnen kann.
Bestimmen Sie diesen Näherungswert. (4 VP)

Aufgabe A 2.2

In der Skizze sind zwei geradlinige Gleise abgebildet, die in den Punkten A bzw. B enden. Diese Gleise sollen durch ein Gleisstück knickfrei verbunden werden. Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion, die dieses Gleisstück beschreibt.



(4 VP)

alternativ:

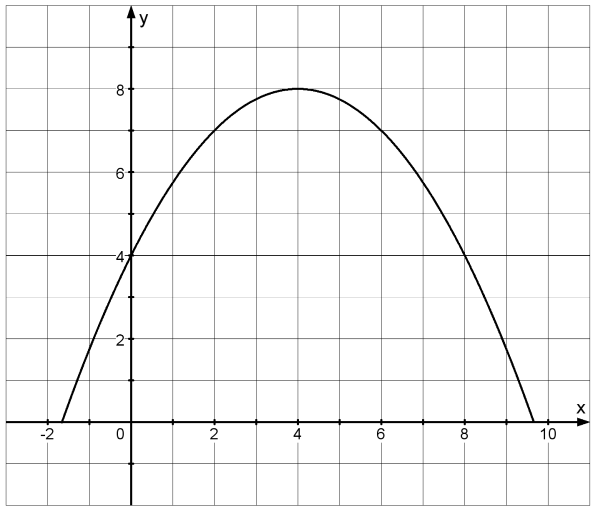
Aufgabe A 2.2*

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$.

Wie muss $t > 0$ gewählt werden, damit der Mittelwert der Funktionswerte von f auf dem Intervall $[0;t]$ möglichst groß ist? (4 VP)

Aufgabe A 3.1

Die Skizze zeigt den parabelförmigen Querschnitt eines 1,5 km langen, geradlinig und horizontal verlaufenden Straßentunnels.



a) Bestimmen Sie einen Funktionsterm der im Bild dargestellten Funktion f .
Die Querschnittsfläche des Tunnels entspricht der Fläche, die der Graph von f und die x-Achse begrenzen (Längeneinheit in m).
Wie viel Kubikmeter Gestein mussten beim Bau des Tunnels bewegt werden?
(Teilergebnis: $f\left(x\right)=-\frac{1}{4}x^2+2x+4$) (5 VP)

b) Der Formelsammlung ist zu entnehmen, wie die Länge eines Kurvenstücks berechnet werden kann:
Das Kurvenstück k: $y = f(x)$ für $a \le x \le b$ hat die (Bogen-)Länge
$$s=\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \quad .$$
Bestimmen Sie mit dieser Formel die Länge des abgebildeten Parabelstücks.

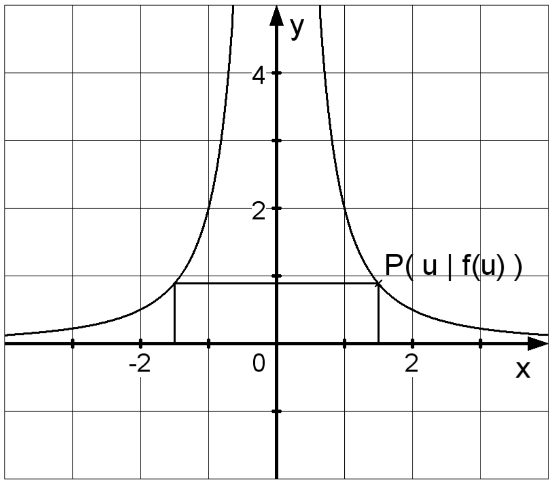
Die gesamte innere Wandfläche des Tunnels wird gestrichen. Die Farbe wird in 250-Liter-Behältern geliefert.
Wie viele Behälter werden benötigt, wenn ein Liter Farbe für sechs Quadratmeter Wandfläche ausreicht? (4 VP)

Aufgabe A 3.2

Gegeben ist die Funktion f mit

$f(x)=\frac{2}{x^2}$, $x \neq 0$.

a) Das gezeichnete Rechteck rotiert um die y-Achse, wodurch ein Zylinder entsteht. Zeigen Sie, dass sein Volumen nicht von u abhängt.



(2 VP)

b) Der Graph von f , die Gerade $x = 1$ und die x-Achse bestimmen eine nach rechts offene Fläche.

Berechnen Sie ihren Inhalt.

Welche Parallele zur y-Achse halbiert diese Fläche? (4 VP)

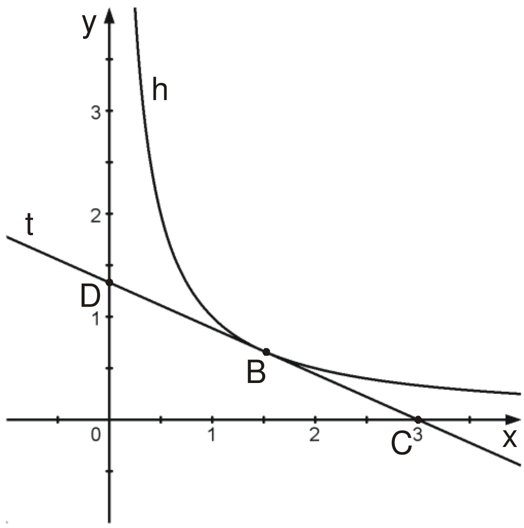
alternativ:

Aufgabe A 3.2*

Gegeben sind die Hyperbel h: $y=\frac{1}{x}$ und ein Punkt B auf h im 1. Feld.

Die Tangente t in B an h schneidet die x-Achse in C und die y-Achse in D .

Bestimmen Sie einen Punkt B so, dass das Dreieck OCD den Umfang 10 LE besitzt.



(6 VP)

Aufgabe Geo 1 (HT 2005, II 1, gekürzt und verändert)

Gegeben sind eine Pyramide ABCDS mit den Punkten A(0|0|0), B(8|0|0), C(8|8|0), D(0|8|0) und S(4|4|8) sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene $E_r : r\,x_1 + 3\,x_3 = 8r$.

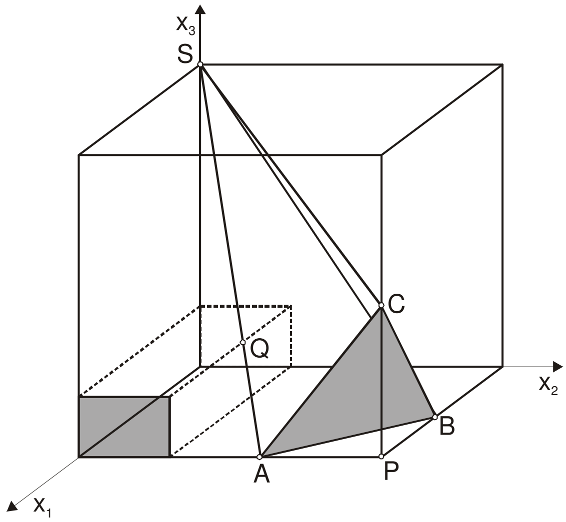
a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Zeigen Sie, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt. (4 VP)

b) Zeigen Sie, dass für den Winkel α zwischen der Ebene E_r und der Grundfläche ABCD der Pyramide $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{r^2+9}}$ gilt.
Bestimmen Sie einen Wert für r , für den $\alpha = 40°$ ist. (4 VP)

c) Beim Schnitt einer Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich?
Geben Sie jeweils die zugehörigen Werte von r an. (3 VP)

Aufgabe Geo 2 (HT 2008, II 1, Teile a und c)

In einem Würfel mit den Eckpunkten O(0|0|0), P(10|10|0) und S(0|0|10) befindet sich eine Pyramide mit einem Dreieck als Grundfläche und der Spitze S (vgl. Skizze).
Die Eckpunkte der Pyramidengrundfläche sind A(10|6|0), B(6|10|0) und C(10|10|5).



a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E , in der die Grundfläche der Pyramide liegt.
Welchen Winkel schließen die Grundflächen von Würfel und Pyramide ein?
Untersuchen Sie, ob die Höhe der Pyramide auf der Diagonalen PS des Würfels liegt.
(Teilergebnis: $E : 5x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 80$) (6 VP)

b) Zusätzlich zur Pyramide soll nun noch ein Quader der Breite b in den Würfel gelegt werden. Die Abmessungen des Quaders werden so gewählt, dass er die Pyramide nur in einem Punkt Q der Pyramidenkante AS berührt (vgl. Skizze).
Welches Volumen hat ein solcher Quader mit der Breite $b = 4$?
Welche Werte kann das Volumen eines solchen Quaders annehmen, wenn die Breite b variabel ist? (5 VP)

Aufgabe Sto 1

In einem Gefäß U_1 sind zwei blaue Kugeln, in einem weiteren Gefäß U_2 sind acht rote Kugeln. Lisa darf mit verbundenen Augen eines der beiden Gefäße wählen und daraus eine Kugel ziehen. Ist die Kugel rot, dann gewinnt Lisa einen Preis.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Lisa einen Preis gewinnt?

Lisa hat 50 weitere rote Kugeln zur Verfügung und darf nun bestimmen, wie viele zusätzliche rote Kugeln in U_1 gelegt werden. Allerdings werden dann genauso viele blaue Kugeln in U_2 gelegt.
Lisa wählt fünf zusätzliche rote Kugeln.
Hat sich dadurch ihre Gewinnwahrscheinlichkeit vergrößert?
Wie viele von den 50 zusätzlichen roten Kugeln hätte Lisa wählen müssen, um ihre Gewinnchancen zu maximieren? (7 VP)

Aufgabe Sto 2

Eine Klasse will für einen guten Zweck beim Schulfest ein Glücksrad betreiben. Dieses besteht aus drei Sektoren mit den folgenden Mittelpunktswinkeln:
rot: 180°, gelb: 90° und blau: 90°.
Bei einem Spiel dreht der Kunde das Glücksrad dreimal und bezahlt dafür einen Euro.
Er erhält zwei Euro, wenn er dreimal dieselbe Farbe erreicht, er bekommt seinen Einsatz zurück, wenn genau zweimal dieselbe Farbe angezeigt wird, in allen anderen Fällen wird sein Einsatz einbehalten.

Welchen Gewinn erzielt die Klasse mit diesem Glücksrad pro Spiel durchschnittlich?

Die Klasse will im nächsten Jahr durch eine Veränderung der Sektorengrößen die Wahrscheinlichkeit der Fälle, in denen der Einsatz einbehalten wird, erhöhen. Dabei sollen die Spielregeln erhalten bleiben und der rote Sektor soll weiterhin doppelt so groß sein wie der gelbe.
Für welche Mittelpunktswinkel der drei Sektoren ist die Wahrscheinlichkeit für den Einbehalt des Einsatzes am größten? (6 VP)

Aufgabe Sto 3

a) Eine Urne enthält drei weiße und zwei schwarze Kugeln. Franz und Hilde ziehen abwechselnd ohne Zurücklegen eine Kugel, wobei Franz beginnt. Gewonnen hat, wer zuerst eine schwarze Kugel zieht.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: Franz gewinnt,
B: Hilde gewinnt. (2 VP)

b) In einer anderen Urne sind drei weiße und n schwarze Kugeln.
Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
Für welche Werte von n ist die Wahrscheinlichkeit, genau eine schwarze Kugel zu ziehen, gleich $\frac{3}{8}$? (4 VP)

Aufgabe Sto 4

Ein Glücksrad hat die Sektoren mit den Zahlen 1, 2 und 3 mit folgender Wahrscheinlichkeitsverteilung:

Sektor	1	2	3
Wahrscheinlichkeit	0,2	0,3	0,5

a) Wie oft muss man das Glücksrad mindestens drehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens einmal die Zahl 1 zu bekommen? (2 VP)

b) Es besteht der Verdacht, dass die Wahrscheinlichkeit für die Zahl 1 größer als 0,2 ist. Daher wird die Hypothese H_0: $p \le 0{,}2$ durch 100 Versuche getestet.
Wenn mehr als 28 Mal die 1 erscheint, wird die Hypothese abgelehnt.
Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit? (4 VP)

Aufgabe Sto 5

Eine Firma stellt Solartaschenrechner her. Die Herstellungskosten eines Rechners betragen 15 €. Die Firma verkauft ihn für 25 € an den Händler.
14,5% aller produzierten Rechner sind defekt. Jeder defekte Rechner wird vom Händler entdeckt. Die Firma erstattet den Kaufpreis und nimmt den defekten Rechner zurück.
Bei der Rücknahme entstehen der Firma zusätzlich Kosten in Höhe von 5 €.

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Gewinn der Firma pro Rechner? (2 VP)

b) Durch eine Kontrolle kann die Firma 95% der defekten Rechner herausfinden, hält aber auch 1% der intakten Rechner für defekt. Die beanstandeten Rechner werden dann nicht an den Händler verkauft, sondern ohne weitere Kosten entsorgt.
Wie viel darf die Kontrolle eines Rechners höchstens kosten, damit sie sich für die Firma rentiert? (4 VP)

Aufgabe Sto 6

Eine Firma, die Handys herstellt, behauptet, dass höchstens 4% der Geräte defekt seien. Die Behauptung soll mit einer Stichprobe von 250 Stück getestet werden. Man erhält 10 defekte Handys.
Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% schließen, dass die Firmenangabe nicht zutrifft? (4 VP)

Aufgabe Sto 7

Ein Computerhersteller bezieht von einem Lieferanten Speicherchips.
Erfahrungsgemäß sind 95% der Chips einwandfrei.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 30 Chips
   - mehr als 26 einwandfrei,
   - mindestens zwei defekt? (2 VP)

b) Der Computerhersteller überprüft die Hypothese, dass mindestens 95% der Chips einwandfrei sind, mit einer Stichprobe vom Umfang 100.
Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll höchstens 10% betragen.
Ermitteln Sie den Ablehnungsbereich. (3 VP)

Aufgabe Sto 8

Ein Computerhersteller bezieht von einem Lieferanten Speicherchips.

a) Erfahrungsgemäß sind 80% der Chips einwandfrei.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind von 30 Chips mehr als 20 einwandfrei? (2 VP)

b) Wie groß dürfte die Defektwahrscheinlichkeit eines Chips höchstens sein, damit von 10 Chips mit mindestens 90% Wahrscheinlichkeit alle einwandfrei sind? (3 VP)

Alternative:

b*) Die Chips, die zu 80% einwandfrei sind, werden in Viererpackungen geliefert.
Ab welcher Anzahl Viererpackungen muss mit mehr als 50% Wahrscheinlichkeit damit gerechnet werden, dass in mindestens einer Packung alle Chips defekt sind? (4 VP)

Aufgabe Sto 9

Bei einem Test gibt es 10 Fragen mit jeweils 4 Antworten, von denen nur eine richtig ist.

a) Ein Kandidat kreuzt bei jeder Frage rein zufällig eine Antwort an.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er

A: genau 3 richtige Antworten,

B: mindestens 3 richtige Antworten,

C: mehr als 3, aber weniger als 8 richtige Antworten? (3 VP)

b) Es soll nun festgelegt werden, wie viele richtige Antworten zum Bestehen des Tests ausreichen sollen. Bei zufälligem Ankreuzen der Antworten soll die Wahrscheinlichkeit für ein Bestehen des Testes höchstens 5% betragen.

Wie viele richtige Antworten müssen dazu mindestens verlangt werden? (3 VP)